



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
 Санкт-Петербургский государственный университет  
 Российский государственный педагогический университет  
 Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
 СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова



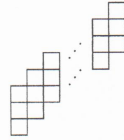
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
 ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 10 КЛАСС I ВАРИАНТ

1. По кругу выписано 29 нулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 29 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом?

2. Биссектриса угла  $A$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  пересекает основание  $BC$  в точке  $K$ . Описанная окружность треугольника  $AKD$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $L$ . Докажите, что  $BL = KC$ .

3. Дана «лесенка»  $100 \times 3$  (в каждой строчке 3 клетки, каждая следующая строчка сдвинута по сравнению с предыдущей на одну клетку вправо). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 300 так, чтобы в каждой горизонтальной и в каждой вертикальной строке возрастали (слева направо и сверху вниз)?



4. Существует ли такой квадратный трёхчлен  $f(x)$  с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$f(x) = f(6x - 1), \quad f(t) = f(3 - 15t)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

5. Положительные числа  $a \leq b \leq c$  и натуральное число  $n$  удовлетворяют условию  $a^n + b^n = c^n$ . Докажите неравенство  $c - b \leq (\sqrt{2} - 1)a$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН;  
 КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;  
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.  
 ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
 Если Вы занимаетесь в кружке математики — ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.  
 Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.gas.ru/](http://www.pdmi.gas.ru/) - olump и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem) 13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте [foxford.ru/spb](http://foxford.ru/spb)

Отпечатано в РИС «СПб ГДПО». 2015 г. Заказ № 2015/10\_1 экз.

Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
 Санкт-Петербургский государственный университет  
 Российский государственный педагогический университет  
 Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
 СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

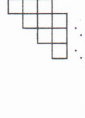
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
 ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 10 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. По кругу выписано 23 нулевые цифры. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 23 двузначных числа, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом?

2. На основании  $DC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  отмечена точка  $M$ , а на боковой стороне  $BC$  — точка  $N$  так, что  $DM = CN$  и точки  $A, M, N, B$  лежат на одной окружности. Докажите, что  $BM$  — биссектриса угла  $ABC$ .

3. Дана «лесенка»  $50 \times 3$  (в каждом столбце 3 клетки, каждый следующий столбец сдвинут по сравнению с предыдущим на одну клетку вверх). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 150 так, чтобы в каждой горизонтальной и в каждой вертикальной строке возрастали (слева направо и снизу вверх)?



4. Существует ли такой квадратный трёхчлен  $g(x)$  с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$g(y) = g(2 - 23y), \quad g(x) = g(5 + 10x)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

5. Положительные числа  $x \leq y \leq z$  и натуральное число  $d$  удовлетворяют условию  $2x^d + y^d = z^d$ . Докажите неравенство  $z - y \leq (\sqrt[3]{3} - 1)x$ .

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН;  
 КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;  
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.  
 ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
 Если Вы занимаетесь в кружке математики — ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.  
 Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.gas.ru/](http://www.pdmi.gas.ru/) - olump и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem) 13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте [foxford.ru/spb](http://foxford.ru/spb)

Отпечатано в РИС «СПб ГДПО». 2015 г. Заказ № 2015/10\_2 экз.