



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
 Санкт-Петербургский государственный университет
 Российский государственный педагогический университет
 Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
 СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Уравнение $ax + \frac{a}{x} = b$, в котором коэффициенты a , b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{a}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{a}{x} = b - 1$.
2. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется *ло-роши*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими?
3. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекла основание BC в точке K . Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке $L \neq A$. Докажите, что $BL = KC$.
4. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y).$$

- Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$.
5. На доске написаны два числа: 10^6 и 10^9 . Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В конце своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.
 КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
 ФИО преподавателей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
 Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.gas.ru/ olupr и www.anichkov.ru/olimpus/matem
 13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb

Отпечатано в РИС «СПб ГДПО» 2015 г. Заказ № 72/Гираж/50 экз.



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
 Санкт-Петербургский государственный университет
 Российский государственный педагогический университет
 Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
 СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г. I ТУР 11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Уравнение $ax - \frac{a}{x} = b$, в котором коэффициенты a , b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax - \frac{a}{x} = b - 2$ и $ax - \frac{a}{x} = b + 2$.
2. По кругу расставили числа от 1 до 30. Число называется *ло-роши*, если оно делится на число, стоящее слева от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими?
2. На основании DC равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка M , а на боковой стороне BC — точка N так, что $DM = CN$ и точки A, M, N, B лежат на одной окружности. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC .
4. Функция f при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству

$$f(x^2 - 2y) \leq f(x^2 - y).$$

- Известно, что $f(1000) = 1000$. Найдите $f(2015)$.
5. На доске написаны два числа: 10^7 и 10^{10} . Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В конце своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.
 КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.
 ФИО преподавателей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
 ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.
 Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.gas.ru/ olupr и www.anichkov.ru/olimpus/matem
 13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb

Отпечатано в РИС «СПб ГДПО» 2015 г. Заказ № 72/Гираж/50 экз.