

9 класс

Первый день

- 9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
- 9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведен диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.
- 9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
- 9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

9 класс

Первый день

- 9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
- 9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведен диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.
- 9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
- 9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

10 класс**Первый день**

- 10.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
- 10.2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?
- 10.3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.
- 10.4. Дана клетчатая таблица 100×100 , клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

10 класс**Первый день**

- 10.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
- 10.2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?
- 10.3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.
- 10.4. Дана клетчатая таблица 100×100 , клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

11 класс**Первый день**

- 11.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена $f(x)$ быть рациональным?
- 11.2. Положительные числа x , y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство
$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$
- 11.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На отрезке CL выбрана точка M . Касательная в точке B к окружности Ω , описанной около треугольника ABC , пересекает луч CA в точке P . Касательные в точках B и M к окружности Γ , описанной около треугольника BLM , пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.
- 11.4. Есть клетчатая доска 2015×2015 . Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500 . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

11 класс**Первый день**

- 11.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена $f(x)$ быть рациональным?
- 11.2. Положительные числа x , y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство
$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$
- 11.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На отрезке CL выбрана точка M . Касательная в точке B к окружности Ω , описанной около треугольника ABC , пересекает луч CA в точке P . Касательные в точках B и M к окружности Γ , описанной около треугольника BLM , пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.
- 11.4. Есть клетчатая доска 2015×2015 . Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500 . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?