Материалы для проведения регионального этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Первый день

5–6 февраля 2016 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, И. И. Богданов, И. А. Бочков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, К. А. Кноп, А. С. Кузнецов, В. Б. Мокин, В. А. Омельяненко, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Эксперт: к. ф.-м. н. С. П. Коновалов.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **05 февраля 2016 г.** (I тур) и **06 февраля 2016 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2015–2016 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, апелляции и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015–2016 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$. (*Б. Обухов*)

Решение. Так как CC' — диаметр Ω, имеем $\angle C'AC = 90°$. Поскольку $MP \parallel BC$, получаем $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$ (см. рис. 1). Значит, треугольник AMP — равнобедренный, и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

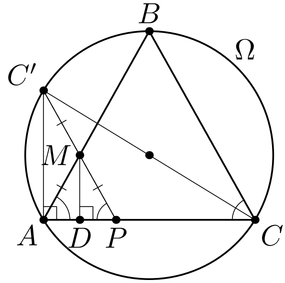

Рис. 1

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть 2^k — наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на 2^k, то два соседних таких числа будут различаться на 2^k. Значит, одно из них будет делиться на 2^{k+1}, что невозможно в силу выбора k. Значит, среди выписанных чисел ровно одно делится на 2^k.

Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на 2^k, а НОК оставшейся группы — не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на 2^k; с другой стороны, эта сумма больше, чем 2^k. Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

Комментарий. Доказано, что ровно одно из выписанных чисел делится на максимальную степень двойки — 2 балла.

9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, …, 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. За 2 загрузки.

Решение. Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слитки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами $1, \ldots, 6$ кг использовал соответственно слитки с весами $w_1, \ldots, w_6$ кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leqslant 11$, $w_1 + w_4 + w_6 \leqslant 11$. Складывая эти неравенства, получаем $w_1 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) \leqslant 22$. В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Отсюда следует, что $w_1 \leqslant 22 - 21 = 1$. Значит, $w_1 = 1$, то есть слиток веса 1 кг однозначно определён.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомый слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков — требуемый.

Замечание. После указанных двух загрузок также однозначно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

Комментарий. Доказано только, что одной загрузки мешка недостаточно — 1 балл.

Приведён только верный пример двух загрузок, но не доказано, что он работает — 3 балла (эти баллы могут складываться с предыдущим).

Приведён верный пример двух загрузок, доказано, что он работает, но не доказано, что одной загрузкой не обойтись — 6 баллов.

10 класс

10.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

10.2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Заметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Среди десяти петиных чисел есть либо одно, либо два числа, делящихся на 8. В первом случае одно из полученных наименьших общих кратных (НОК) делится на 8, а второе — нет, и потому их сумма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух петиных чисел, делящихся на 8, равна 8, поэтому одно из них делится на 16, а другое — нет. Следовательно, одно из НОК делится на 16, а другое — нет. Значит, и в этом случае сумма НОК делиться на 16 не может.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Разобран только случай, когда на 8 делится ровно одно число из десяти — 3 балла.

10.3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан. (*Т. Зиманов, П. Кожевников*)

Решение. В случае $AB \parallel CD$ имеем $BC = KN$, поэтому $AK = BL = CM = DN$. Значит, четырёхугольник $LMDA$ получается из $BCNK$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BL}$.

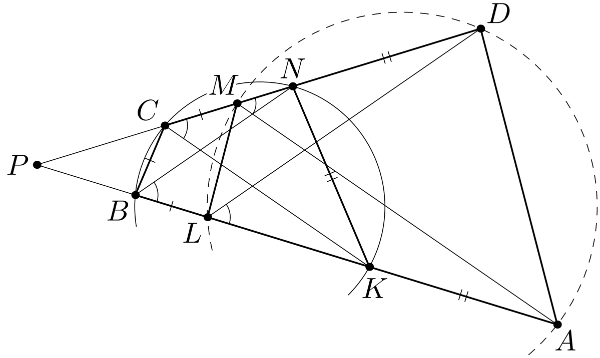

Рис. 2

Пусть теперь AB и CD не параллельны; обозначим через P точку пересечения прямых AB и CD. Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, треугольники PBC и PNK подобны; отсюда $\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}$. Значит, $BN \parallel LD$ (см. рис. 2). Аналогично, $CK \parallel MA$. Отсюда получаем $\angle ALD = \angle KBN$ и $\angle KCN = \angle AMD$.

Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, то $\angle KBN = \angle KCN$. Поэтому и $\angle ALD = \angle AMD$, то есть $ADML$ также вписан.

Замечание. Есть и другие решения; например, из равенств $\angle AKN = \angle NCB$ и $\angle DNK = \angle KBC$ следует, что четырехугольники $BCML$ и $NKAD$ подобны, поэтому $\angle BLM = \angle MDA$.

Комментарий. Доказано, что $BN \parallel LD$ (или $CK \parallel MA$, или обе эти параллельности) — 3 балла.

Верное доказательство подобия четырехугольников $BCLM$ и $NKAD$ — не менее 3 баллов.

За рассмотрение частного случая, скажем $AB \parallel CD$ — 0 баллов.

Если предъявлено верное решение, формально не работающее в случае $AB \parallel CD$ — баллы не снимаются.

10.4. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток? (*И. Богданов*)

Ответ. $6 \cdot 50^2 - 5 \cdot 50 + 1 = 14\,751$ пар.

Решение. Обозначим длину стороны таблицы через $2n = 100$ (так что $n = 50$) и пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо числами от 1 до $2n$.

В каждой строке может быть от 0 до $2n$ чёрных клеток. Так как количества чёрных клеток во всех строках различны, эти количества — все числа от 0 до $2n$, кроме одного (скажем, кроме k). Тогда общее число чёрных клеток равно $(0 + 1 + \ldots + 2n) - k = 2n^2 + n - k$. С другой стороны, так как во всех столбцах клеток поровну, общее число чёрных клеток должно делиться на $2n$. Значит, $k = n$, и во всех столбцах по $2n^2/(2n) = n$ чёрных клеток.

Оценим теперь сверху количество пар соседних по стороне разноцветных клеток, считая отдельно пары клеток, соседних по горизонтали и по вертикали.

Если в строке $i \leqslant n - 1$ чёрных клеток, то они могут участвовать не более, чем в $2i$ горизонтальных парах. Если в строке $i \geqslant n + 1$ чёрных клеток, аналогичное рассуждение можно применить к белым клеткам, коих $2n - i \leqslant n - 1$. Итого, горизонтальных разноцветных пар не больше, чем $2 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \ldots + 2 \cdot (n - 1)) = 2n(n - 1)$.

Оценим теперь количество вертикальных пар. Рассмотрим любую строку с чётным номером от 2 до $2(n - 1)$; пусть в ней i чёрных клеток. Тогда либо в строке сверху, либо в строке снизу от неё число чёрных клеток не равно $100 - i$; значит, одна из вертикальных пар, в которых участвуют клетки нашей строки, будет одноцветной. Итого, есть хотя бы $n-1$ одноцветных вертикальных пар. Так как общее число вертикальных пар равно $2n(2n-1)$, то разноцветных из них — не больше, чем $2n(2n-1)-(n-1)$. Итого, общее число разноцветных пар не больше, чем $2n(n-1)+(4n^2-3n+1) = 6n^2-5n+1 = 14751$.

Осталось привести пример, в котором указанное число пар достигается. Проведём в нашей таблице $2n \times 2n$ диагональ из верхнего левого угла в нижний правый. Все клетки, лежащие на или ниже диагонали, покрасим в чёрный цвет, если они лежат в чётных строках, и в белый — иначе (раскраска «по строкам»). Все клетки, лежащие выше диагонали, покрасим в чёрный цвет, если сумма номеров их строки и столбца чётна, и в белый иначе («шахматная» раскраска). Пример такой раскраски при $n = 4$ показан на рис. 3. Нетрудно проверить, что в каждом столбце ровно по n чёрных клеток, в $2i$-й строке есть $n+i$ чёрных клеток, а в $(2i-1)$-й строке — $n-i$ чёрных клеток. Кроме того, все оценки выше достигаются.

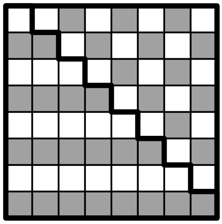

Рис. 3

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и верный пример — 2 балла.

Только доказательство точной оценки — 4 балла.

Доказательство точной оценки только на количество вертикальных или только на количество горизонтальных разноцветных пар — 2 балла (могут складываться с баллами за правильный пример).

Доказано, что в таблице нет строки, содержащей ровно 50 чёрных клеток — ставится 1 балл, если в работе нет других существенных продвижений (иначе этот балл не добавляется).

11 класс

11.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным? *(Г. Жуков)*

Ответ. Нет, не может.

Решение. Так как трёхчлен $f(x)$ не имеет корней, то $c = f(0) \neq 0$ и $f(c) \neq 0$. Тогда выражение $\frac{f(c)}{c}$ иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но $\frac{f(c)}{c} = \frac{ac^2 + bc + c}{c} = ac + b + 1$. Так как $b + 1$ рационально, то ac — иррационально. Получаем, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

Комментарий. В целом верное решение не проходит, если $c = 0$ и/или $f(c) = 0$ — 6 баллов.

11.2. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(А. Храбров)

Решение. По неравенству о средних имеем

$$xy+xz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot xz}, \quad xy+yz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot yz}, \quad xz+yz \geqslant 2\sqrt{xz \cdot yz}.$$

Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учётом условия, получаем

$$xyz \geqslant xy + xz + yz \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$

Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

Замечание. Это решение легче придумать, если переписать данное и требуемое неравенства в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 1$ и $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \leqslant 1$.

11.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как BL — биссектриса $\angle ABC$, имеем $\angle ABL = \angle LBC$. Поскольку PB — касательная к Ω, имеем $\angle PBA = \angle BCA$ (см. рис. 4). Кроме того, $\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC = \angle BLP$, значит, $\angle BPM = 180^\circ - (\angle PBL + \angle BLP) = 180^\circ - 2\angle BLP$. Отсюда следует, в частности, что $\angle BLP$ — острый.

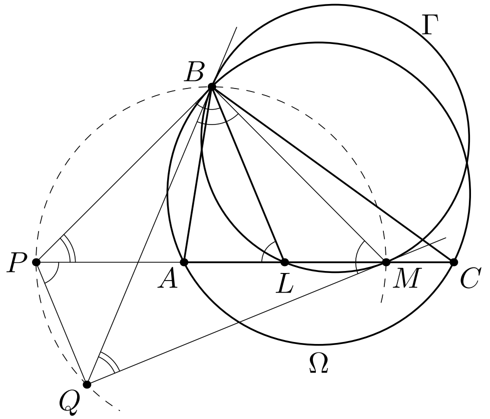

Рис. 4

Так как $\angle BLM = 180^\circ - \angle BLP$ тупой, касательные к Γ в точках B и M пересекаются в точке Q, лежащей по ту же сторону от BM, что и точка L (а значит — по ту же сторону, что и P). Далее, имеем $\angle QBM = \angle QMB = 180^\circ - \angle BLM = \angle BLP$. Значит, $\angle BQM = 180^\circ - 2\angle QBM = 180^\circ - 2\angle BLP = \angle BPM$. Поэтому точки B, M, P и Q лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle QPM = \angle QBM = \angle BLP$. Это и означает, что $PQ \parallel BL$.

Комментарий. Доказано, что четырёхугольник $BPQM$ вписан — 3 балла.

Задача сведена к доказательству вписанности четырёхугольника $BPQM$ — 2 балла.

Доказано, что точки P и Q лежат с одной стороны от BM — 0 баллов.

За отсутствие обоснования расположения точки Q баллы не снимаются.

11.4. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. $k = 2(2015 - 1500) = 1030$.

Решение. Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках средней строки квадрата, а остальные 515 детекторов — в 515 верхних клетках среднего столбца. Заметим, что при любом положении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец — один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в средней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогично, строки, в которых он находится, восстанавливаются по показаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку k детекторов, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положения корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. Показания какого-то детектора для них будут различаться, только если этот детектор лежит в самом левом столбце левого корабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках 1500×1, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках 1×1500, отличающихся вертикальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Назовём такие пары прямоугольников *вертикальными* и *горизонтальными*, соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски (таких пар $2 \cdot 515 = 1030$). Аналогично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в левых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьём доску на 9 прямоугольных областей так, как показано на рис. 3. Выделенные пары не покрывают клеток из E; каждая же клетка в остальных областях покрыта двумя выделенными парами (в D и F — двумя вертикальными, в B и H — двумя горизонтальными, а в областях A, C, G и I — одной горизонтальной и одной вертикальной). Итак, каждый детектор лежит не более, чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее $2 \cdot 1030/2 = 1030$ детекторов.

Замечание. Существует много других примеров расположения 1030 детекторов, удовлетворяющих требованиям.

Комментарий. Приведён пример расстановки 1030 детекторов, удовлетворяющей требованиям — 1 балл.

Доказано только, что $k \geqslant 1030$ — 5 баллов.

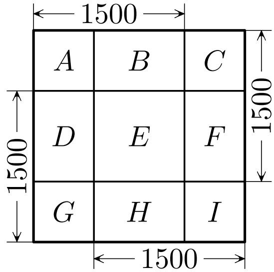

Рис. 5

Если при в целом верном рассуждении в подсчёте количества детекторов в примере или оценке совершена одна или несколько ошибок на единицу (например, считается, что число выделенных вертикальных пар в нижних строках равно 516, а не 515) — снимается 1 балл.

Содержание